

Fiche outils de mathématiques pour la physique-chimie :

les fonctions exponentielle et logarithme népérien

Niveau(x)	Terminale STL PCM et Terminale Spécialité PC
Discipline(s) dominante(s)	Physique-Chimie et Mathématiques
Chapitres	Cinétique d'ordre 1, Radioactivité
Nom de l'activité	Fiche outils : les fonctions $\exp(x)$ et $\ln(x)$
Type d'activité	Activité de découverte et exercices d'application
Déroulement de la séance	Présentation des fonctions mathématiques et représentations graphiques. Propriétés des fonctions puis utilisation de ces propriétés.
Durée de l'activité et remarques	40 min (découverte des bases mathématiques) + 40 min (exercices d'application en physique-chimie lors d'une autre séance éventuelle ou bien pour un devoir à la maison)

Pré-requis et progression sur cette notion

Niveau	Programme de mathématiques	Programme de Physique
2nde	- Notion de fonction $y = f(x)$ - Lecture graphique (variation, extrema simples) - Fonctions affines $ax + b$ - Calcul algébrique élémentaire (isoler une variable)	- Lecture de graphiques expérimentaux - Notion de grandeur physique dépendant du temps - Première approche de la modélisation (relation entre grandeurs)
1ère STL	- Calcul sur les puissances a^n - Manipulation d'expressions littérales - Introduction au logarithme népérien $\ln$ - Résolution d'équations simples	- Exploitation de données expérimentales - Ajustement de courbes - Identification d'une évolution non linéaire - Introduction à des lois empiriques
Term STL	- Résolution et manipulation de lois exponentielles - Exploitation graphique (droite via log) - Lecture de constantes (pente, ordonnée à l'origine)	- Cinétique d'ordre 1 - Radioactivité

Compétences pouvant être évaluées au cours de l'activité

☒ S'approprier	☒ Analyser	☒ Réaliser	☐ Valider	☐ Communiquer
--	--	--	----------------------------------	--------------------------------------

Auteur

Philippe THIBAUT

La fonction exponentielle (e^x)

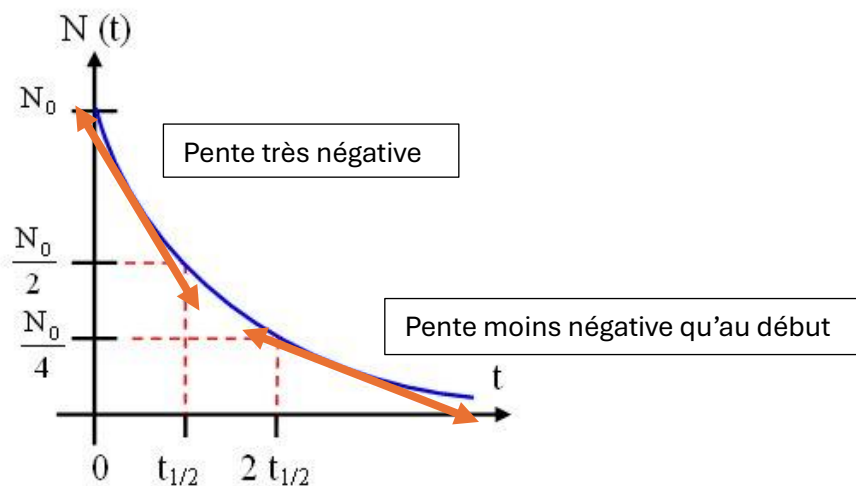
au sein du programme de terminale PCM

Objectif de cette fiche pédagogique :

- (BO) Aborder l'objectif *Établir la loi de décroissance radioactive et montrer l'analogie avec une réaction d'ordre 1.*
- Proposer aux élèves un contenu mêlant des notions abordées au sein de chapitres distincts avec pour fil rouge la fonction mathématique *exponentielle*;
- Proposer un contenu théorique mathématique et appliqué à des exemples concrets d'application en physique-chimie (filière STL-PCM) ;

1) La fonction exponentielle $f(x) = e^x$, d'où ça sort ?

Nous partons d'un phénomène observable : la décroissance radioactive :



Si $N(t)$ est le nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon, à l'instant t , nous observons ici une **décroissance exponentielle**, qu'est-ce que cela veut dire ?

Simplement, on voit que la décroissance est d'abord forte (la pente est très négative) puis la pente s'adoucit (la pente est moins négative). Pourquoi cela ? Il s'avère que moins il y a d'atomes radioactifs dans l'échantillon et moins il y a de désintégration :

La variation du nombre de noyaux radioactifs au cours du temps dépend elle-même du nombre d'atomes radioactifs !

Analogies non scientifique mais économique :

« En début de mois, on s'offre un restaurant pour célébrer le salaire qui est tombé ! Plus le mois avance et moins on s'offre de petits plaisirs car l'argent vient à manquer ».

En mathématiques, lorsque l'on reprend le cas de la radioactivité, cela revient à dire la chose suivante, sous forme d'une équation différentielle :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N(t)$$

On fait face à équation où la dérivée est proportionnelle à sa fonction d'origine :

$$f'(x) = k \cdot f(x) \quad (\text{avec } k = -\lambda)$$

La seule fonction mathématique qui vérifie cette propriété est (C et k constantes) :

$$f(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$$

ou encore ici ce que l'on appelle **la loi de décroissance radioactive !**

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Avec λ la constante de radioactivité de l'élément chimique étudié et N_0 le nombre initial d'atomes de l'échantillon radioactif étudié.

Et c'est là qu'intervient la fonction exponentielle !! Pourquoi ?

Parce que par définition : Si $f(x) = e^{k \cdot x}$ alors $f'(x) = k \cdot e^x = k \cdot f(x)$

et la fonction va permettre de résoudre l'équation différentielle proposée.

2) Le temps de demi-vie et l'introduction de la fonction $\ln(x)$

Le logarithme népérien $\ln$ est la réciproque de la fonction exponentielle :

$$\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$$

D'une certaine manière, les fonctions $\ln(x)$ et e^x se « compensent », tout comme les fonction $\log(x)$ et 10^x).

Le temps de demi-vie est le temps nécessaire pour que la moitié des éléments radioactifs d'un échantillon soit désintégrés. Quel que soit l'échantillon de départ, le temps de demi-vie appelé $t_{1/2}$ est toujours le même !

Exercice avec le temps de demi-vie : activité d'un échantillon (Bordas, 2020).

Soit un échantillon contenant N_0 noyaux d'argent 108 à l'instant $t = 0$ s. On note $N(t)$ le nombre de noyaux restant à l'instant t .

- Établir** l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 , t et λ , la constante radioactive.
- Définir** le temps de demi-vie $t_{1/2}$ en une phrase.
- Établir** la relation entre le temps de demi-vie $t_{1/2}$ et la constante radioactive λ .
Quelle est l'unité de λ sachant que nous nous intéressons à un nombre d'éléments radioactifs?
- Définir** l'activité d'une source radioactive en une phrase. Quelle est son expression ?
- Quelle est son unité dans le Système international ? À quoi correspond-elle ?
- Montrer que** l'activité peut s'écrire :

$$A(t) = \lambda N(t)$$

3) La fonction exponentielle à travers le programme de PCM

On retrouve la fonction exponentielle à plusieurs reprises au cours de l'année de terminale STL – PCM, au sein de deux chapitres :

- Loi de décroissance radioactive - radioactivité (voir le cours associé)
- Cinétique chimique d'ordre 1 (voir le cours associé) que ce soit pour les réactifs consommés ou le/les produits.

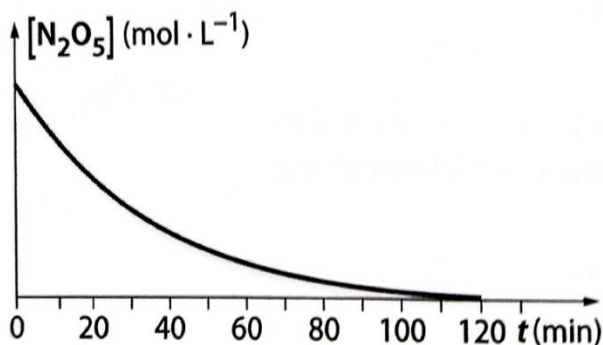
Exercice de cinétique chimique d'ordre 1 – décomposition du pentaoxyde de diazote (Bordas, 2020)

Le dioxyde d'azote NO_2 est un gaz roux, l'un des principaux polluants atmosphériques.

Il peut être obtenu par la réaction d'ordre 1 d'équation :



Dans une enceinte de volume constant maintenue à 50°C , on introduit du pentaoxyde de diazote N_2O_5 et on suit sa décomposition avec un manomètre. On en déduit la concentration en N_2O_5 au cours du temps, représentée sur le graphique ci-dessous.



- Décrire** la courbe représentant la concentration molaire de N_2O_5 en fonction du temps.
- Proposer une expression de la fonction qui permet de modéliser cette courbe, à partir de vos connaissances de cours.
- Définir** le temps de demi-réaction puis le déterminer graphiquement.
- Représenter** l'allure de la concentration en N_2O_5 au cours du temps à 100°C . Justifier cette allure.
- Quelle constante de l'expression obtenue à la question 1 est modifiée lorsque l'on modifie la température de réaction ?

Pour revenir sur ces notions en ligne :

Sur **Wilapa/ Elea**, accès aux modules d'évaluation formative concernant la fonction exponentielle, la radioactivité et la cinétique d'une réaction chimique (insérer QR code)